Exercice 1 : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,-1,-1)$, $B(0,-2,1)$ et $C(1,-2,0)$

0.75 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

0.5 b) En déduire que $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

0.75 Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(2,-1,1)$ et que son rayon est $R=\sqrt{5}$

0.5 3) a) Calculer $d(\Omega,(ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC)

0.5 b) En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) (la détermination du centre et du rayon de (Γ) n'est pas demandée)

Exercice 2 : (3 points)

0.75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-2z+4=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A ,B C et D d'affixes respectives $a=1-i\sqrt{3}$, $b=2+2i$, $c=\sqrt{3}+i$ et $d=-2+2\sqrt{3}$

0.5 a) Vérifier que $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$

0.25 b) En déduire que les points A , C et D sont alignés .

3) On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

0.5 Vérifier que $z'=\frac{1}{2}az$

4) Soient H l'image du point B par la rotation R , h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p=a-c$

0.5 a) Vérifier que $h=ip$

0.5 b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient dix boules : trois boules vertes , six boules rouges et une boule noire indiscernables au toucher . On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne .

On considère les événements suivants : A : « Obtenir trois boules vertes . »

B : « Obtenir trois boules de même couleur . »

C : « Obtenir au moins deux boules de même couleur . »

2 1) Montrer que $p(A)=\frac{1}{120}$ et $p(B)=\frac{7}{40}$

1 2) Calculer $p(C)$.

Problème : (11 points)

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1\ cm$)

0.5 1) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement

0.25 2) a) Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$

0.5 b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0.5 c) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

puis en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

0.75 d) Montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y=x$

0.5 3)a) Montrer que pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\le 0$

et que pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\ge 0$

1 b) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$

0.5 c) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0.5 4) a) Montrer que $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$

0.5 b) En déduire que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées .

0.5 5)a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ et déduire la position relative de (C) et (Δ)

1 b) Construire (Δ) et (C) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 6)a) Montrer que la fonction $H:x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive de la fonction $h:x\mapsto\ln x$ sur $]0,+\infty[$

0.75 b) A l'aide d'une intégration par parties , montrer que $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$

0.5 c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

	Deuxième partie :
	Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de IN
0.5	1) a)Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de IN
0.5	b) Montrer que la suite (u_n) est croissante .
0.5	c) En déduire que la suite (u_n) est convergente .
0.75	2) Calculer la limite de la suite (u_n) .