المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2013
الموضوع

NS25

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعب(ة) أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte trois exercices et un problème indépendants deux à deux.
- Les exercices et le problème peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes.
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique.
- Le problème se rapporte à l'analyse.

L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

Exercice1 :(3,5pts)

On rappelle que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif, unitaire et intègre.

1- On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)\ ;\ \ x*y=x+y-2$$

0.5 a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0.25 b) Montrer que $(\mathbb{Z},*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0.5 c) En déduire que $(\mathbb{Z},*)$ est un groupe commutatif.

2- On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne T définie par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)\ ;\ \ x\mathrm{T}y=xy-2x-2y+6$$

et on considère l'application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par : $\left(\forall x\in\mathbb{Z}\right)\ ;\ \ f(x)=x+2$

0.5 a) Montrer que l'application f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},\times)$ dans $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$

0.25 b) Montrer que : $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right)\ ;\ \ (x*y)\mathrm{T}z=(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)$

0.75 3- En déduire de tout ce qui précède que $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ est un anneau commutatif et unitaire.

0.25 4-a) Montrer que : $x\mathrm{T}y=2$ si est seulement si ($x=2$ ou $y=2$)

0.25 b) En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ est intègre.

0.25 c) $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ est-il un corps ? (justifier votre réponse)

Exercice2 :(3,5pts)

I- Soit a un nombre complexe non nul.

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : (E): $\ 2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$

0.25 1-Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2 a^2$

0.5 2-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

II-Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les points A, B et M d'affixes respectifs a , $b=ae^{i\frac{\pi}{3}}$ et z

Soit r la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

On pose $A_1=r^{-1}(A)$ et $B_1=r(B)$ (r^{-1} désigne la rotation réciproque de r)

et soient a_1 et b_1 les affixes respectifs de A_1 et B_1

0.5 1-Vérifier que le triangle OAB est équilatéral.

0.5 2- a) Montrer que : $a_1=\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ et $b_1=\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

0.5 b) Montrer que le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme.

3- On suppose que : $M\neq A$ et $M\neq B$

0.5 a) Montrer que : $\dfrac{z-b_1}{z-a_1}=-\dfrac{z-b}{z-a}\times\dfrac{a}{b}$

0.75 b) Montrer que M , A_1 et B_1 sont alignés si et seulement si M , O , A et B sont cocycliques.

<u>Exercice3</u> :(3pts)

L'objectif de l'exercice est de chercher les entiers naturels n strictement supérieurs à 1 et qui vérifient la propriété suivante : $(R) : 3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$

1-On suppose que n vérifie la propriété (R) et soit p **<u>le plus petit diviseur premier positif</u>** de n.

0.75 a)Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$, en déduire que $p \geq 5$

0.5 b) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$

0.5 c)Montrer qu'il existe un couple (a,b) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$

0.5 d) Soient r et q le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $p-1$

$$\left(a = q(p-1) + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < p-1 \ \text{ et } q \in \mathbb{Z}\right)$$

Montrer qu'il existe **<u>un entier naturel</u>** k tel que : $rn = 1 + k(p-1)$

0.75 2- En déduire de tout ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1 vérifiant (R)

<u>Problème</u> :(10pts)

On considère la fonction numérique h définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$$h(1) = 1 \ \text{ et } \ (\forall x > 1) ;\ h(x) = \frac{x-1}{x\ln x}$$

<u>Première partie</u> :

0.25 1-a)Montrer que la fonction h est continue à droite en 1

0.75 b) Montrer que : $(\forall x > 1) ;\ \ln x < x - 1$, en déduire que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$

0.5 2-a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ puis donner le tableau de variations de h

0.25 b) En déduire que : $(\forall x \geq 1) ;\ 0 < h(x) \leq 1$

<u>Deuxième partie</u> :

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$$g(1) = \ln 2 \quad \text{et} \quad (\forall x > 1) ;\ g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,dt$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.25 1-a) Vérifier que : $(\forall x > 1) ;\ \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln 2$

0.25 b) Vérifier que : $(\forall x > 1) ;\ g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,dt$

0.5 c) Montrer que : $(\forall x > 1) ;\ g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt$

0.5 2-a)Montrer que : $(\forall x>1)$; $(x-\sqrt{x})h(x)\le g(x)-\ln 2\le(x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$

0. 5 b) En déduire que la fonction g est dérivable à droite au point 1

0.75 c)Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$

0.75 3-a)Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$ et que : $(\forall x>1)$; $g'(x)=\dfrac{1}{2}h(\sqrt{x})$

0.5 b) En déduire que : $(\forall x\ge 1)$; $0<g'(x)\le\dfrac{1}{2}$, puis donner le tableau de variations de g

0.5 c) Construire la courbe (C)

Troisième partie :

0.5 **I**-1-Montrer que la fonction $k:x\mapsto g(x)-x+1$ est une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ dans l'intervalle $]-\infty,\ln 2]$

0.25 2- En déduire qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1,+\infty[$ qui vérifie : $1+g(\alpha)=\alpha$

II- On considère la suite numérique $(u_n)_{n\ge 0}$ définie par :

$$1\le u_0<\alpha \quad \text{et} \quad (\forall n\ge 0)\ ;\ u_{n+1}=1+g(u_n)$$

0.5 1- a) Montrer que : $(\forall n\ge 0)$; $1\le u_n<\alpha$

0.5 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge 0}$ est strictement croissante.

0.75 c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\ge 0}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall n\ge 0)$; $|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n\ge 0)$; $|u_n-\alpha|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$

0.25 c) En déduire une deuxième fois, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

FIN