

Corrigé de l'exercice 1 :

1-

- ✓ $E \neq \emptyset$ (car $O = M(0,0) \in E$)
- ✓ $E \subset M_2(\mathbb{R})$
- ✓ Soient $M(x,y)$ et $M(a,b)$ deux éléments de E :

On a :

$$\begin{aligned} M(x,y) - M(a,b) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-a & -2(y-b) \\ y-b & (x-a)+2(y-b) \end{pmatrix} \\ &= M(x-a, y-b) \end{aligned}$$

$$((x-a, y-b) \in \mathbb{R}^2)$$

Donc : $\forall (M(x,y), M(a,b)) \in E^2 : M(x,y) - M(a,b) \in E$

D'où E est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

2- a) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

- ✓ On a : $E \neq \emptyset$ et $E \subset M_2(\mathbb{R})$
- ✓ Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(M(x,y), M(a,b)) \in E^2$

On a :

$$\begin{aligned} \alpha M(x,y) + \beta M(a,b) &= \alpha \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x & -2\alpha y \\ \alpha y & \alpha x + 2\alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a & -2\beta b \\ \beta b & \beta a + 2\beta b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + \beta a & -2\alpha y - 2\beta b \\ \alpha y + \beta b & \alpha x + 2\alpha y + \beta a + 2\beta b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + \beta a & -2(\alpha y + \beta b) \\ \alpha y + \beta b & (\alpha x + \beta a) + 2(\alpha y + \beta b) \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b) \end{aligned}$$

$$((\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b) \in \mathbb{R}^2)$$

Donc : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (M(x,y), M(a,b)) \in E^2 : \alpha M(x,y) + \beta M(a,b) \in E$

D'où E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

b)

✓ Soit $M(x, y) \in E$, on a :

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y & 2y \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= x.I + y.J \end{aligned}$$

Donc (I, J) est une famille génératrice de l'espace vectoriel E

✓ Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

On a :

$$\begin{aligned} \alpha I + \beta J = O &\Rightarrow M(\alpha, \beta) = M(0, 0) \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -2\beta \\ \beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \alpha = 0 \text{ et } \beta = 0 \end{aligned}$$

Donc (I, J) est une famille libre de l'espace vectoriel E

✓ On conclut que (I, J) est une base de l'espace vectoriel E

3- a)

✓ $E \subset M_2(\mathbb{R})$

✓ Soit $(M(x, y), M(a, b)) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned} M(x, y) \times M(a, b) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa - 2yb & -2xb - 2ya - 4yb \\ ya + xb + 2yb & -2yb + xa + 2bx + 2ya + 4yb \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa - 2yb & -2(xb + ya + 2yb) \\ xb + ya + 2yb & (xa - 2yb) + 2(xb + ya + 2yb) \end{pmatrix} \\ &= M(xa - 2yb, xb + ya + 2yb) \end{aligned}$$

$$((xa - 2yb, xb + ya + 2yb) \in \mathbb{R}^2)$$

Donc : $\forall (M(x, y), M(a, b)) \in E^2 : M(x, y) \times M(a, b) \in E$

D'où E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

b) Montrons que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif

- ✓ $(E, +)$ est un groupe commutatif ($(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel)
- ✓ " \times " est associative
- ✓ " \times " est distributive par rapport à "+"
- ✓ Soit $(M(x, y), M(a, b)) \in E^2$:

$$\begin{aligned} M(x, y) \times M(a, b) &= M(xa - 2yb, xb + ya + 2yb) \\ &= M(ax - 2by, bx + ay + 2by) \\ &= M(a, b) \times M(x, y) \end{aligned}$$

Et par suite $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif .

4- a) Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, on a :

$$\begin{aligned} \checkmark \\ \varphi(z \times z') &= \varphi((x + iy) \times (a + ib)) \\ &= \varphi((xa - yb) + i(xb + ya)) \\ &= M((xa - yb + xb + ya); -(xb + ya)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \\ \varphi(z) \times \varphi(z') &= \varphi(x + iy) \times \varphi(a + ib) \\ &= M(x + y, -y) \times M(a + b, -b) \\ &= M((x + y)(a + b) - 2(-y)(-b), (x + y)(-b) - y(a + b) + 2(-y)(-b)) \\ &= M(xa + xb + ya + yb - 2yb; -xb - yb - ya - yb + 2yb) \\ &= M(xa + xb + ya - yb; -(xb + ya)) \end{aligned}$$

Donc $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$: $\varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$

Donc φ est un homomorphisme de (\mathbb{C}^*, \times) vers $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

b)

✓ Soit $M(x, y) \in E^*$

Existe-t-il z de \mathbb{C}^* , tel que $\varphi(z) = M(x, y)$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = M(x, y) &\Leftrightarrow \varphi(a + ib) = M(x, y) \\ &\Leftrightarrow M(a + b, -b) = M(x, y) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ -b = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = x - b \\ b = -y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = x + y \text{ et } b = -y \end{aligned}$$

Donc $\forall M(x, y) \in E^* \exists (a, b) = (x + y, -y) \in (\mathbb{R}^*)^2 : \varphi(a + ib) = M(x, y)$

Donc φ est surjective

Et par suite $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

c) On a φ est un homomorphisme surjective

Et puisque (\mathbb{C}^*, \times) est un groupe commutatif alors $(\varphi(\mathbb{C}^*), \times)$ est aussi un groupe commutatif

Et comme $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$, on a donc (E^*, \times) est un groupe commutatif.

5- On a :

✓ $(E, +)$ est un groupe commutatif.

✓ (E^*, \times) est un groupe commutatif.

✓ " \times " est distributive par rapport à "+"

Donc $(E, +, \times)$ est un groupe commutatif.

Corrigé de l'exercice 2 :

1- Soit p un nombre premier tel que : $p = 3 + 4k$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

On a : $p - 5 = 4k - 2 = 2(2k - 1)$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Soit $x \in \mathbb{Z}$:

On a :

$$\begin{aligned} x^2 \equiv 1[p] &\Rightarrow (x^2)^{2k-1} \equiv 1^{2k-1}[p] \\ &\Rightarrow x^{4k-2} \equiv 1[p] \\ &\Rightarrow x^{p-5} \equiv 1[p] \end{aligned}$$

Donc pour tout entier relatif x , si $x^2 \equiv 1[p]$ alors $x^{p-5} \equiv 1[p]$

2- a) Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5} \equiv 1[p]$

Montrons que x et p sont premiers entre eux .

Puisque $x^{p-5} \equiv 1[p]$ alors il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $x^{p-5} = 1 + up$

Donc $u \in \mathbb{Z}$ tel que $x^{p-6} \cdot x - u \cdot p = 1$ ($p-6 \in \mathbb{N}^*$)

Donc d'après le théorème de Bézout $x \wedge p = 1$

D'où x et p sont premiers entre eux .

b) On a p un nombre premier et $x \wedge p = 1$

Donc d'après le théorème de Fermat : $x^{p-1} \equiv 1[p]$

c)

$$\begin{aligned} 2 + (k-1)(p-1) &= 2 + (k-1)(4k+2) \\ &= 2 + 4k^2 + 2k - 4k - 2 \\ &= 4k^2 - 2k \\ &= k(4k-2) \\ &= k(p-5) \end{aligned}$$

d) On a $x^{p-5} \equiv 1[p]$

Donc $(x^{p-5})^k \equiv 1^k[p]$

Donc $x^{k(p-5)} \equiv 1[p]$

Donc $x^{2+(k-1)(p-1)} \equiv 1[p]$

Donc $x^2 \cdot x^{(k-1)(p-1)} \equiv 1[p]$

Donc $\boxed{x^2 \cdot (x^{p-1})^{k-1} \equiv 1[p]}$

Et d'autre part on a $x^{p-1} \equiv 1[p]$

Donc $(x^{p-1})^{k-1} \equiv 1[p]$

Donc $\boxed{x^2 \cdot (x^{p-1})^{k-1} \equiv x^2[p]}$

On déduit que : $x^2 \equiv 1[p]$

3- Résolvons dans \mathbb{Z} l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$

On a pour tout entier relatif x , $x^2 \equiv 1[p] \Leftrightarrow x^{p-5} \equiv 1[p]$

avec p un nombre premier tel que : $p = 3 + 4k$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

on 67 est un nombre premier et : $67 = 3 + 4(16)$

On a :

$$\begin{aligned}
 x^{62} \equiv 1[67] &\Leftrightarrow x^{67-5} \equiv 1[67] \\
 &\Leftrightarrow x^2 \equiv 1[67] \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 1 \equiv 0[67] \\
 &\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0[67] \\
 &\Leftrightarrow x-1 \equiv 0[67] \text{ ou } x+1 \equiv 0[67] \text{ (car } p \text{ est premier)} \\
 &\Leftrightarrow x \equiv 1[67] \text{ ou } x \equiv -1[67]
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } S = \{1 + 67k / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-1 + 67k / k \in \mathbb{Z}\}$$

Corrigé de l'exercice 3 :

I- Soit $m \in \mathbb{C}$

On considère dans l'ensemble complexes \mathbb{C} l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

1- a)

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (im + 2)^2 - 4(1)(im + 2 - m) \\
 &= -m^2 + 4im + 4 - 4im - 8 + 4m \\
 &= -m^2 + 4m - 4 \\
 &= -(m - 2)^2 \\
 &= (i(m - 2))^2 \\
 &= (im - 2i)^2
 \end{aligned}$$

b)

✓ Si $m = 2$: alors l'équation (E_2) admet une solution unique

$$z = \frac{-(2i + 2)}{2} = -1 - i$$

$$\text{Donc } S = \{-1 - i\}$$

✓ Si $m \in \mathbb{C} - \{2\}$: alors l'équation (E_m) admet deux solutions :

$$z = \frac{-(im+2)+(im-2i)}{2(1)} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-(im+2)-(im-2i)}{2(1)}$$

$$z = \frac{-2-2i}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-2im-2+2i}{2}$$

$$z = -1-i \quad \text{ou} \quad z = -1-im+i$$

Donc $S = \{-1-i, -1-im+i\}$

2- Pour $m = i\sqrt{2}$

✓

$$\begin{aligned} -1-i &= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \sqrt{2} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned} -1-im+i &= -1-i(i\sqrt{2})+i \\ &= -1+\sqrt{2}+i \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \sqrt{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \sqrt{2} \left(e^{i(0)} + e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \right) \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} \left(e^{i\frac{-3\pi}{8}} + e^{i\frac{3\pi}{8}} \right) \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} \times 2 \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ &= 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cdot e^{i\frac{3\pi}{8}} \quad \left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0 \right) \end{aligned}$$

II-

1- Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'

a) l'affixe z du centre de la rotation R est solution de l'équation $z = -iz - 1 + i$

$$\begin{aligned} z &= -iz - 1 + i \\ (1+i)z &= -1 + i \\ z &= \frac{-1+i}{1+i} = \frac{i(1+i)}{(1+i)} = i \end{aligned}$$

Donc $z = \omega$

D'où Ω est le centre de R

b) Déterminons l'affixe b de B , où B est le point tel que : $A = R(B)$

$$\begin{aligned} a &= -ib - 1 + i \\ ib &= -1 + i - a \\ b &= \frac{-1 + i - a}{i} \\ b &= \frac{-1 + i + 1 + i}{i} \\ b &= \frac{2i}{i} \\ \boxed{b = 2} \end{aligned}$$

2- a) On a :

✓

$$\begin{aligned} m' - a &= -im - 1 + i + 1 + i \\ &= -im + 2i \\ &= -i(m - 2) \\ &= -i(m - b) \end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned} \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b) &= \frac{i + 1 + i}{i - 2}(m - b) \\ &= \frac{1 + 2i}{-2 + i}(m - b) \\ &= \frac{-i(-2 + i)}{-2 + i}(m - b) \\ &= -i(m - b) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$$

b)

✓ Si $m = a$: le résultat demandé est évident

✓ Si $m \neq a$:

$$\text{On a : } \frac{m' - a}{m - a} = \frac{\omega - a}{\omega - b} \times \frac{m - b}{m - a}$$

$$\begin{aligned}
 A, M \text{ et } M' \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow \frac{m' - a}{m - a} \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\omega - a}{\omega - b} \times \frac{m - b}{m - a} \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow A, B, \Omega \text{ et } M \text{ sont cocycliques}
 \end{aligned}$$

c) On a : A, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow A, B, \Omega$ et M sont cocycliques

Et par suite M appartient au cercle circonscrit au triangle $AB\Omega$ rectangle et isocèle en Ω

$$(A = R(B))$$

Donc M appartient au cercle de diamètre $[AB]$

$$\checkmark \text{ De rayon : } r = \frac{AB}{2} = \frac{|b - a|}{2} = \frac{|3 + i|}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\checkmark \text{ Et de centre le point } I \text{ d'affixe : } z_I = \frac{a + b}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Corrigé de l'exercice 4 :

Partie I :

1- a) soit $x \in]0, +\infty[$:

on a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \frac{t}{1+t} dt &= \int_0^x \frac{1+t-1}{1+t} dt \\
 &= \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\
 &= \int_0^x \left(1 - \frac{(1+t)'}{1+t}\right) dt \\
 &= [t - \ln|1+t|]_0^x \\
 &= x - \ln(1+x)
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in]0, +\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = x - \ln(1+x)$$

b) Soit $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{pmatrix} u = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{u} \\ t \cdot dt = \frac{1}{2} du \\ t = 0 \rightarrow u = 0 \\ t = x \rightarrow u = x^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^x \frac{t}{1+t} dt = \int_0^{x^2} \frac{du}{1+\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}} du$$

$$\text{Donc } (\forall x \in]0, +\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}} du$$

c) Soient $x \in]0, +\infty[$ et $u \in [0, x^2]$:

$$\text{On a } 0 \leq u \leq x^2$$

$$\text{Donc } 0 \leq \sqrt{u} \leq x$$

$$\text{Donc } 1 \leq 1 + \sqrt{u} \leq 1 + x$$

$$\text{Donc } \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+\sqrt{u}} \leq 1$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{1}{2(1+\sqrt{u})} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \int_0^{x^2} \frac{1}{2(1+x)} du \leq \int_0^{x^2} \frac{1}{2(1+\sqrt{u})} du \leq \int_0^{x^2} \frac{1}{2} du$$

$$\text{Et par suite : } (\forall x \in]0, +\infty[) ; \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

2- On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in]0, +\infty[) ; \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$:
$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln(1+x) & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- a) On a : $f(0) = 1$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \end{cases}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} \ln(1+x) = f(0)$ alors f est continue à droite en 0

b) On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x+1}{x} \ln(1+x) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1) \ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(1+x)}{x^2} + \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc : f est dérivable à droite en 0 et on a $f'_d(0) = \frac{1}{2}$

c)

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \ln(x+1) = +\infty$$

$$\text{Car : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty \end{cases}$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+1}{x} \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 \times \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

$$\text{Car : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \end{cases}$$

✓ (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2- a) on a :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x+1}{x} \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[$$

$$f_2 : x \mapsto \ln(1+x) \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[$$

Donc $f = f_1 \times f_2$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

Soit $x \in]0, +\infty[$:

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(\frac{x+1}{x} \right) \ln(x+1) \right)' \\ &= \left(\frac{x+1}{x} \right)' \ln(x+1) + \frac{x+1}{x} (\ln(x+1))' \\ &= \frac{-1}{x^2} \ln(x+1) + \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{x+1} \\ &= -\frac{1}{x^2} \ln(x+1) + \frac{1}{x} \\ &= \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$\text{b) on a } (\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

comme $x^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $x - \ln(1+x)$

$$\text{on a } (\forall x \in]0, +\infty[) ; \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } (\forall x \in]0, +\infty[) ; \frac{x^2}{2(1+x)} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}x^2$$

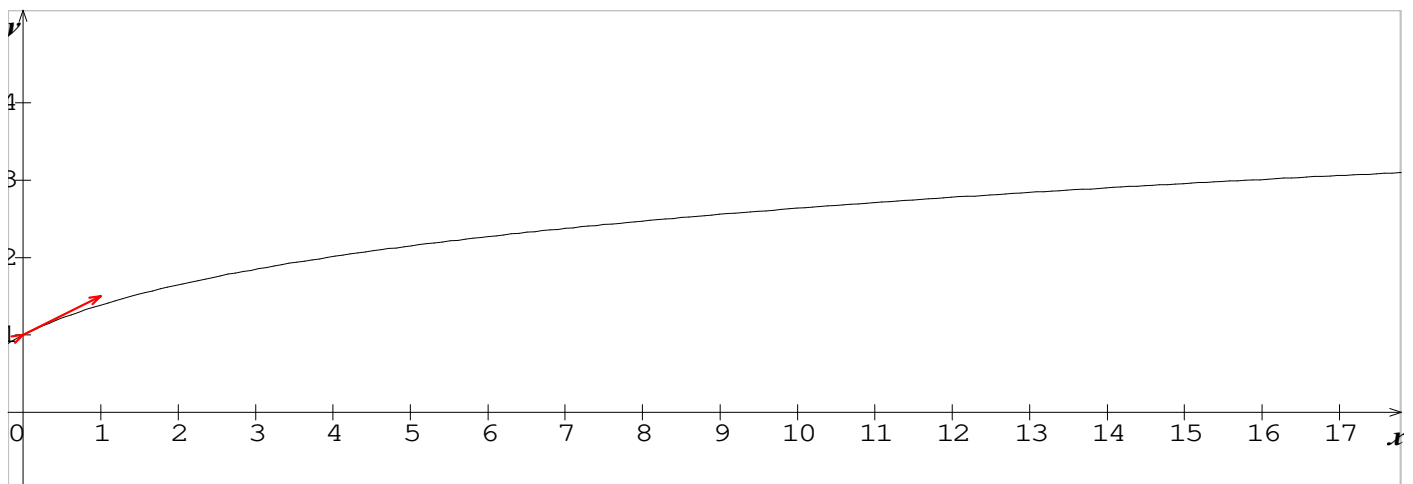
donc $f'(x) > 0$

et par suite f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

c) on a f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$$\text{donc } f(]0, +\infty[) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [1, +\infty[$$

3-



Partie III :

1- a) on a $(\forall x \in]0, +\infty[)$; $\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

donc $(\forall x \in]0, +\infty[)$; $0 < \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

et par suite $(\forall x \in]0, +\infty[)$; $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$

b)

✓ on a g est dérivable sur $]0, +\infty[$

soit $x \in]0, +\infty[$:

on a : $g'(x) = f'(x) - 1$

et comme $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ alors $f'(x) - 1 < 0$

donc $(\forall x \in]0, +\infty[)$; $g'(x) < 0$

et par suite g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

✓ on a g est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

donc $g(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[=]-\infty, 1[$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - 1 \right) \\
 &= -\infty \\
 &\text{car } \left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

c) On a :

- ✓ g est continue sur $]0, +\infty[$
- ✓ g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$
- ✓ $0 \in g(]0, +\infty[)$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0, +\infty[$

Et par suite l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $]0, +\infty[$

2- Soit a un réel de l'intervalle $]0, +\infty[$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

a)

- ✓ Pour $n = 0$:

On a $u_0 = a$ et $a > 0$

Donc $u_0 > 0$

- ✓ Soit $n \in \mathbb{N}$

- Supposons que $u_n > 0$
- Montrons que $u_{n+1} > 0$?

On a d'après l'hypothèse de récurrence $u_n > 0$

Et comme f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Alors $f(u_n) > f(0)$

Donc $u_{n+1} > 1 > 0$

- ✓ On conclut que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

- ✓ f est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités u_n et α
- ✓ f est dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités u_n et α

$$\checkmark (\forall x \in]0, +\infty[) ; 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc d'après l'inégalité des accroissements finis : } |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$\text{Et par suite } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$(f(u_n) = u_{n+1} \text{ et } f(\alpha) = \alpha)$$

c)

✓ Pour $n = 0$:

$$\text{On a } |u_0 - \alpha| = |a - \alpha| \text{ et } \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a - \alpha| = |a - \alpha|$$

$$\text{Donc } |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a - \alpha|$$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$

- Supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

- Et montrons que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|$?

$$\text{On a d'après la question précédente } \boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|} \quad (*)$$

$$\text{Et on a d'après l'hypothèse de récurrence } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$$

$$\text{Donc } \boxed{\frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|} \quad (**)$$

$$\text{De } (***) \text{ et } (**), \text{ on obtient : } \boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|}$$

$$\checkmark \text{ On conclut que } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$$

d) On a $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha| = 0$$

$$\text{Et comme } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$$

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

Corrigé de l'exercice 5 :

On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

1-

✓ On a $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur \mathbb{R}

(composée de deux fonctions continues sur \mathbb{R})

Donc F est dérivable sur \mathbb{R} (primitive d'une fonction qui s'annule en 0)

Et par suite F est continue sur \mathbb{R}

✓ Soit $x \in \mathbb{R}$:

On a $F'(x) = e^{x^2}$

Puisque : $e^{x^2} > 0$

Alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad F'(x) > 0$

D'où F est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2-

✓ On a : $t^2 \geq 0$

Donc : $e^{t^2} \geq 1$

Donc : $\int_0^x e^{t^2} dt \geq \int_0^x 1 dt$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad F(x) \geq x$

✓ On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \quad F(x) \geq x \end{array} \right.$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

3-

▪ Soit $x \in \mathbb{R}$, On a :

✓ $-x \in \mathbb{R}$

✓ $F(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt$

$$\begin{pmatrix} u = -t \Leftrightarrow t = -u \\ dt = -du \\ t = 0 \rightarrow u = 0 \\ t = -x \rightarrow u = x \end{pmatrix}$$

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt = -\int_0^x e^{(-u)^2} du = -\int_0^x e^{u^2} du = -\int_0^x e^{t^2} dt = -F(x)$$

Donc F est impaire .

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} F(-u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} -F(u) = -\infty$$

4- Puisque F est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}
alors F est une bijection de \mathbb{R} vers $F(\mathbb{R})$

$$\text{tel que : } F(\mathbb{R}) = F(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

5- On a $F(0) = 0$

Et $F'(0) = 1$ donc $F'(0) \neq 0$

✓ On a F est dérivable en 0 et $F'(0) \neq 0$

Donc G est dérivable en 0

$$\text{Et on a : } G'(0) = (F^{-1})'(0) = (F^{-1})'(F(0)) = \frac{1}{F'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

つづく